数理解析研究所講究録
第 744 巻 1991 年 255-268

保存型定作用素係数二階線形非定常問題の近似理論

電気通信大学大学院情報工学専攻　松木美保子
電気通信大学情報工学科　牛島照夫

1．はじめに

ヒルベルト空間 X 上の正定値自己共役作用素 A を用いた定作用素係数二階線形非定常問題 $\frac{d^2}{dt^2}\phi + A\phi = \psi$ を考える．作用素 A を有限次元部分空間 X_h 上の正定値有界自己共役作用素 A_h におきかえ，さらに時間方向 t をニューマークの方法により離散化した問題の解の誤差評価を与える．作用素 A_h は，有限要素法においてある種の変分法違反により定義される場合にも適用できるように設定した．本報告は，初期データと非斉次データに対する条件を緩めた場合を含むように，牛島–松木［3］の結果を拡張したものである．最後に，この問題の一具体例である水の波線形非定常問題の有限要素計算の結果を示す．

2．二階線形非定常問題のニューマークの方法による全離散近似

ヒルベルト空間 X を固定し，その内積とノルムを $(\cdot, \cdot)$ と $\|\cdot\|$ で表す．空間 X 上の正定値自己共役作用素 A を与える．ただし正数 $\underline{\alpha}$ が存在して，A のスペクトル $\sigma(A)$ は区間 $[\underline{\alpha}, \infty)$ に含まれるものとする．

以下では正定数 $\bar{h}$ を固定する．空間 X の有限次元部分空間 X_h を $h \in (0, \bar{h}]$ に対して定め，空間 X_h 上の正定値有界自己共役作用素 A_h を，正数 $\underline{\alpha}_h\ (\geq \underline{\alpha})$, $\bar{\alpha}_h$ が存在して $\sigma(A_h) \subset [\underline{\alpha}_h, \bar{\alpha}_h]$ が成り立つように与える．部分空間 X_h を内積 $(\cdot, \cdot)$ を持つヒルベルト空間とみなす．

さらに以下では，次の条件 $(\varepsilon-1)$, $(\varepsilon-2)$ を満たす区間 $(0, \bar{h}]$ 上の関数 $\varepsilon(h)$ が存在するものと仮定する：

$(\varepsilon-1)$　$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$,

$(\varepsilon-2)$　$\left\{\begin{array}{l}\|A_h\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon(h)} \text{を満たす } h \in (0, \bar{h}] \text{ に依らない} \\ \text{正定数 } \alpha \text{ が存在する.}\end{array}\right.$

さて，ある実数 s に対して，不等式

$$\|(A_h^{-1}P_h - A^{-1})\phi\| \leq C\varepsilon(h)^{1+s}\|A^s\phi\|, \qquad \phi \in D(A^s)$$

を満たす正数 C が存在することを，条件 $(\mathrm{A}_{\varepsilon,s})$ が成立するということにする．また条件 $(\mathrm{A}_{\varepsilon,s})$ と $(\mathrm{A}_{\varepsilon,0})$ が成立することを，条件 (ε_s) が成立するということにする．

空間 $C^m([0,\ \infty):\ X)$ を，区間 $[0,\ \infty)$ 上で定義される m 回連続微分可能な X 値関数の空間とする．空間 $C^2([0,\ \infty):\ X)$ 上の作用素 L を次のように定める：

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + A.$$

また X_h の列 $\{\phi_m:\ m = 0, 1, 2, \cdots\}$ に対して作用素 $L^{\delta,\beta}_{h,\tau}$ を次のように定める：

$$L^{\delta,\beta}_{h,\tau} = (1 + \beta\tau^2 A_h)D_{\tau\bar{\tau}} + A_h + \delta\tau A_h D_{\bar{\tau}}.$$

ここで，β と δ は $h \in (0,\ \bar{h}]$ に依らない非負定数，τ は h に応じて定める正定数，$D_{\bar{\tau}}$，D_τ，$D_{\bar{\tau}\tau}$ は次式で定める差分作用素である：

$$\begin{aligned} D_{\bar{\tau}}\phi_m &= (\phi_m - \phi_{m-1})/\tau, \\ D_\tau\phi_m &= (\phi_{m+1} - \phi_m)/\tau, \\ D_{\bar{\tau}\tau}\phi_m &= (\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1})/\tau^2. \end{aligned}$$

我々は，次式で与える二階定作用素係数非定常問題 $(E:\ \phi^1, \phi^0, \psi)$ とそのニューマークの方法（Raviart–Thomas［1］参照）による全離散近似問題 $(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau}, \phi^0_{h,\tau}, \psi_{h,\tau,m})$ を考察する：

$$(E:\ \phi^1, \phi^0, \psi) \qquad \begin{cases} L\phi(t) = \psi(t), \quad t > 0, \\ \phi(0) = \phi^1, \quad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)(0) = \phi^0, \end{cases}$$

$$(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau}, \phi^0_{h,\tau}, \psi_{h,\tau,m}) \quad \begin{cases} L^{\delta,\beta}_{h,\tau}\phi_{h,\tau,m} = \psi_{h,\tau,m}, \quad m = 1, 2, \cdots, \\ \phi_{h,\tau,0} = \phi^1_{h,\tau}, \quad D_\tau\phi_{h,\tau,0} = \phi^0_{h,\tau}, \end{cases}$$

初期データ ϕ^1，ϕ^0 は X の元，$\phi^1_{h,\tau}$，$\phi^0_{h,\tau}$ は X_h の元として与える．また非斉次データ ψ は区間 $[0,\ \infty)$ 上で定義された X 値関数，$\{\psi_{h,\tau,m};\ m = 1, 2, \cdots\}$ は X_h の列として与える．

3．誤差評価

有界自己共役作用素 $A_{h,\tau}$ を次のように定める：

$$A_{h,\tau} = (1 + \beta\tau^2 A_h)^{-1} A_h.$$

牛島–松木［3］等により次の安定条件が得られている．

定理1［安定条件］

正数 $\gamma \in (0,\ 1)$ を $h \in (0,\ \bar{h}]$ と独立に定め，固定する．任意の $h \in (0,\ \bar{h}]$ に対して，次の安定条件 $(\mathrm{S}^{\delta}_{2\gamma})$ を満たすように τ を定める：

$$(S^{\delta}_{2\gamma}) \qquad \tau^2\ (1+\delta)^2\ \|A_{h,\tau}\| \le (2\gamma)^2.$$

すると $(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau}, \phi^0_{h,\tau}, \psi_{h,\tau,m})$ の解 $\{\phi_{h,\tau,m};\ m=0,1,2,\cdots\}$ に対して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\|\phi_{h,\tau,m}\| \le \left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\|\phi^1_{h,\tau}\| &+ \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\|A_{h,\tau}^{-1/2}\phi^0_{h,\tau}\| \\ &+ \frac{(m-1)\tau}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot \max_{1\le j\le m-1}\|\{(1+\beta\tau^2 A_h)A_h\}^{-1/2}\psi_{h,\tau,j}\|, \\ &\qquad m=2,3,\cdots. \qquad \square\end{aligned}$$

ところで，正数 $\gamma \in (0,\ 1)$ を $h \in (0,\ \bar{h}]$ と独立に定め，

(a) $\beta(2\gamma)^2 < (1+\delta)^2$ ならば，
$$\rho \ = \ 2\gamma\ \{(1+\delta)^2 - \beta(2\gamma)^2\}^{-1/2},$$
(b) $\beta(2\gamma)^2 \ge (1+\delta)^2$ ならば，
$$\rho \ = \ h \text{ に依らない任意の正数}$$

とおく．このとき τ が条件

$$(S^{\rho}_{2\gamma}) \qquad \tau^2\ \|A_h\| \le \rho^2$$

を満たしていれば，条件 $(\mathrm{S}^{\delta}_{2\gamma})$ が成立している．

さて，連続問題 $(E:\ \phi^1, \phi^0, \psi)$ のデータ ϕ^1, ϕ^0, ψ に対する条件を，実数 s を用いて次のように定める：

$$(\mathrm{D}_s) \qquad \begin{cases} \phi^1 \in D(A^{1/2+s}), \qquad \phi^0 \in D(A^s), \\ \psi \in C^2([0,\ \infty):\ X), \\ \psi(0) \in D(A^{s-1/2}), \qquad \psi^{(1)}(0) \in D(A^{s-1}), \\ \psi(t),\ \psi^{(2)}(t) \in D(A^{s-1}), \quad t \ge 0. \end{cases}$$

定理2［誤差評価］

非負定数 s に対して条件 (D_s), (ε_{s-1}) を仮定する．定数 $\gamma\in(0,\ 1)$ を $h\in(0,\ \bar{h}]$ と独立に定める．正数 τ は， $s\in[1,\ \infty)$ ならば条件 $(S^{\delta}_{2\gamma})$ を， $s\in[0,\ 1]$ ならば条件 $(\mathrm{S}^{\rho}_{2\gamma})$ を満たすものとする．連続問題 $(E:\ \phi^1,\phi^0,\ \psi)$ の解 ϕ と全離散問題 $(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau},\ \phi^0_{h,\tau},\ \psi_{h,\tau,m})$ の解 $\{\phi_{h,\tau,m}:\ \ m=0,1,2,\cdots\}$ に対して次の評価が成り立つ．

（1）　$s\in[1/2,\ \infty)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\|\phi(m\tau)-\phi_{h,\tau,m}\|\\
&\le \varepsilon(h)^s\cdot C_1\cdot\{(1+\underline{\alpha}^{-1/2}+m\tau)\cdot E(m\tau;\ s)\\
&\qquad\qquad +\left(1+\tfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\cdot E(0;\ s-\tfrac{1}{2})\}\\
&\quad +\tau^{2\min(1,s)}\cdot(1+m\tau)\cdot\frac{\sqrt{\underline{\alpha}^{-1}+\beta\tau^2}+1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot(1+\beta\rho^2)^{1-\min(1,s)}\cdot\\
&\quad\ \cdot C_2\cdot E(m\tau;\ \min(1,s))\\
&\quad +\beta\,\tau^2\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot\frac{1}{1+\delta}\cdot D(0;\ 1/2)\\
&\quad +\beta\,\tau^{2\min(1,s)}\cdot m\tau\cdot C_3\cdot E(m\tau,\ \min(1,s))\\
&\quad +\delta\,\tau\cdot m\tau\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot C_4\cdot D((m-1)\tau;\ 1/2)\\
&\quad +F(m;\ s),\qquad\qquad m=2,3,\cdots,
\end{aligned}
$$

（2）　$s\in[0,\ 1/2]$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\|\phi(m\tau)-\phi_{h,\tau,m}\|\\
&\le \varepsilon(h)^s\cdot C_5\cdot\{(1+\underline{\alpha}^{-1/2}+m\tau)\cdot E(m\tau;\ s)\\
&\qquad\qquad +\left(1+\tfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\cdot E(0;\ s-\tfrac{1}{2})\}\\
&\quad +\tau^{2s}\cdot(1+m\tau)\cdot\frac{\sqrt{\underline{\alpha}^{-1}+\beta\tau^2}+1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot(1+\beta\rho^2)^{1-s}\cdot C_6\cdot E(m\tau;\ s)\\
&\quad +\tau\cdot\underline{\alpha}^{-s}\cdot C_7\cdot E(m\tau;\ s)\\
&\quad +\beta\,\tau^{2s}\cdot m\tau\cdot(1+\beta\rho^2)^{1/2-s}\cdot C_8\cdot E(m\tau,\ s)\\
&\quad +\delta\,\tau^{2s}\cdot m\tau\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot C_9\cdot D((m-1)\tau;\ s)\\
&\quad +F(m;\ s),\qquad\qquad m=2,3,\cdots,
\end{aligned}
$$

ここで，C_i $(i=1,\cdots,9)$ は $h\in(0,\ \bar{h}]$, τ, β, δ, $\gamma,\underline{\alpha}$ に依らない正定数，そして，

$$
\begin{aligned}
E(t;\ s) &= \|A^{1/2+s}\phi^1\| + \|A^s\phi^0\| + \|A^{-1/2+s}\psi(0)\| + \|A^{-1+s}\psi^{(1)}(0)\| \\
&\quad + \max_{0\le\tau\le t}\|A^{-1+s}\psi(\tau)\| \\
&\quad + (t+\underline{\alpha}^{-1/2})\cdot\max_{0\le\tau\le t}\|A^{-1+s}\psi^2(\tau)\|, \\
D(t;\ s) &= \|A^{1/2+s}\phi^1\| + \|A^s\phi^0\| \\
&\quad + (\underline{\alpha}^{-1}+\beta\tau^2)^{1/2-s}\cdot\{\|\psi(0)\| + t\cdot\max_{0\le\tau\le t}\|\psi^{(1)}(\tau)\|\},
\end{aligned}
$$

$s\in[1/2,\ \infty)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F(m\tau;\ s) \\
&= \left(1+\tfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\|P_h\phi^1-\phi^1_{h,\tau}\| \\
&\quad + \left(\tfrac{\alpha+\beta\tau^2}{1-\gamma^2}\right)^{1/2}\{\|P_h\{\phi^0+\tfrac{\tau}{2}[\psi(0)-A\phi^1]\}-\phi^0_{h,\tau}\| \\
&\qquad + (m-1)\tau\cdot\max_{1\le j\le m-1}\|P_h\psi(j\tau)-\psi_{h,\tau,j}\|\},
\end{aligned}
$$

$s\in[0,\ 1/2]$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&F(m\tau;\ s) \\
&= \left(1+\tfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\|P_h\phi^1-\phi^1_{h,\tau}\| \\
&\quad + \left(\tfrac{\alpha+\beta\tau^2}{1-\gamma^2}\right)^{1/2}\{\|P_h\phi^0-\phi^0_{h,\tau}\| \\
&\qquad + (m-1)\tau\cdot\max_{1\le j\le m-1}\|P_h\psi(j\tau)-\psi_{h,\tau,j}\|\},
\end{aligned}
$$

とおく．□

<u>証明の概略</u>

証明の方針は次のとおりである：

（I）　5つの中間的な初期値問題を設定し，それらの解の差の評価を与える．

（II）　最終的に連続問題のデータで誤差の評価を与える．

まず，2つの空間 $C^2([0,\infty):\ X_h)$ 上の作用素 L_h, $\tilde{L}_h$ を定義する：

$$
\begin{aligned}
L_h &= \tfrac{d^2}{dt^2}+A_h, \\
\tilde{L}_h &= \tfrac{d^2}{dt^2}+A_{h,\tau}.
\end{aligned}
$$

対応する半離散問題 $(\mathrm{E_h}:\ \phi^1_h,\phi^0_h,\psi_h)$, $(\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{h}:\ \tilde{\phi}^1_h,\tilde{\phi}^0_h,\tilde{\psi}_h)$ を次式で定義する：

$$
(\mathrm{E_h}:\ \phi^1_h,\phi^0_h,\psi_h)\quad \left\{\begin{array}{lll} L_h\phi_h &= \psi_h, & t>0, \\ \phi_h(0) &= \phi^1_h, & \left(\frac{d\phi_h}{dt}\right)(0)=\phi^0_h, \end{array}\right.
$$

$$(\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{h}}:\ \tilde{\phi}_h^1, \tilde{\phi}_h^0, \tilde{\psi}_h) \quad \begin{cases} \tilde{L}_h \tilde{\phi}_h &= \tilde{\psi}_h, \qquad\qquad t > 0, \\ \tilde{\phi}_h(0) &= \tilde{\phi}_h^1, \qquad \left(\frac{d\tilde{\phi}_h}{dt}\right)(0) = \tilde{\phi}_h^0. \end{cases}$$

（1） $s \in [1/2, \infty)$ の場合

ϕ_h, ϕ_h^M, $\tilde{\phi}_h$, $\phi_{h,\tau,m}^A$, $\phi_{h,\tau,m}^I$ を次の中間的な初期値問題の解とする：

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h}}:\ P_h\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h}}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi),\\
&(\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{h}}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0, (1+\beta\tau^2A_h)^{-1}P_h\psi),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h},\tau}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0 + \tfrac{\tau}{2}(1+\beta\tau^2A_h)^{-1}\left\{-P_hA\phi^1 + P_h\psi(0)\right\}, P_h\psi(m\tau)),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h},\tau}:\ P_h\phi^1, P_h\left\{\phi^0 + \tfrac{\tau}{2}\left[-A\phi^1 + \psi(0)\right]\right\}, P_h\psi(m\tau)).
\end{aligned}$$

テレスコーピングを行い：

$$\begin{aligned}
&\phi(m\tau) - \phi_{h,\tau,m}\\
&= \{\phi(m\tau) - \phi_h(m\tau)\} + \{\phi_h(m\tau) - \phi_h^M(m\tau)\} + \left\{\phi_h^M(m\tau) - \tilde{\phi}_h(m\tau)\right\}\\
&\quad + \left\{\tilde{\phi}_h(m\tau) - \phi_{h,\tau,m}^A\right\} + \left\{\phi_{h,\tau,m}^A - \phi_{h,\tau,m}^I\right\} + \left\{\phi_{h,\tau,m}^I - \phi_{h,\tau,m}\right\},
\end{aligned}$$

右辺の各項を評価することにより結果を得る：

$$\begin{aligned}
\|\phi(m\tau) - \phi_h(m\tau)\| &= O(\varepsilon(h)^s),\\
\left\|\phi_h(m\tau) - \phi_h^M(m\tau)\right\| &= O(\varepsilon(h)^s),\\
\left\|\phi_h^M(m\tau) - \tilde{\phi}_h(m\tau)\right\| &= O(\beta\tau^{2\min\{1,s\}}),\\
\left\|\tilde{\phi}_h(m\tau) - \phi_{h,\tau,m}^A\right\| &= O(\tau^{2\min\{1,s\}}) + O(\delta\tau),\\
\left\|\phi_{h,\tau,m}^A - \phi_{h,\tau,m}^I\right\| &= O(\varepsilon(h)^s) + O(\beta\tau^2)\\
\left\|\phi_{h,\tau,m}^I - \phi_{h,\tau,m}\right\| &\le F(m;\ s).
\end{aligned}$$

（2） $s \in [0, 1/2]$ の場合

ϕ_h, ϕ_h^M, $\tilde{\phi}_h$, $\phi_{h,\tau,m}^A$, $\phi_{h,\tau,m}^I$ を次の中間的な初期値問題の解とする：

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h}}:\ P_h\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h}}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi),\\
&(\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{h}}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0, (1+\beta\tau^2A_h)^{-1}P_h\psi),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h},\tau}:\ A_h^{-1}P_hA\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi(m\tau)),\\
&(\mathrm{E}_{\mathrm{h},\tau}:\ P_h\phi^1, P_h\phi^0, P_h\psi(m\tau))
\end{aligned}$$

（1）と同様のテレスコーピングを行い，各項を評価することにより結果を得る．

$$
\begin{aligned}
&\|\phi(m\tau)-\phi_h(m\tau)\| = O(\varepsilon(h)^s),\\
&\left\|\phi_h(m\tau)-\phi_h^M(m\tau)\right\| = O(\varepsilon(h)^s),\\
&\left\|\phi_h^M(m\tau)-\tilde{\phi}_h(m\tau)\right\| = O(\beta\tau^{2s}),\\
&\left\|\tilde{\phi}_h(m\tau)-\phi_{h,\tau,m}^A\right\| = O(\tau^{2s})+O(\delta\tau^{2s})+O(\tau),\\
&\left\|\phi_{h,\tau,m}^A-\phi_{h,\tau,m}^I\right\| = O(\varepsilon(h)^s),\\
&\left\|\phi_{h,\tau,m}^I-\phi_{h,\tau,m}\right\| \le F(m;\ s). \quad \square
\end{aligned}
$$

上定理は，$s \in [1,\ \infty)$ に対応する［３］の結果の拡張である．

なお次の命題により，$s \in [0,1]$ の場合，定理２において条件 (ε_{s-1}) の代わりに条件 (ε_0) を仮定してもよい．

命題１

次の条件

$$
(\mathrm{A}_{\varepsilon,0}) \qquad \left\|\left(A^{-1}-A_h^{-1}P_h\right)\phi\right\| \le C^0\varepsilon(h)\|\phi\| \qquad \forall\phi\in X
$$

を満たす $h \in (0,\bar{h})$ に依らない定数 C^0 が存在すれば，任意の $s \in [-1,0]$ に対して次式が，つまり条件 $(\mathrm{A}_{\varepsilon,s})$ が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(A^{-1}-A_h^{-1}P_h\right)\phi\right\| \le C^0\varepsilon(h)^{1+s}\|A^s\phi\| \qquad \forall\phi\in D(A^s),\\
&C = C^0\cdot\max\left\{\alpha,\ \underline{\alpha}^{-1},\ +1,\ (\underline{\alpha}^{-1}+1)\cdot\max\nolimits_{0<h\le\bar{h}}\varepsilon(h),\ \right\}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

４．水の波線形非定常問題の有限要素計算

これまでの議論の具体例の一つである，水の波線形非定常問題の有限要素法による数値計算結果を示す（牛島–松木–青木［４］参照）．

容器内の水の運動は，線形化重力波理論によると，次の線形初期値・境界値問題

（LWW）として記述できる（Stoker［2］）：

$$
\text{(LWW)} \quad \begin{cases}
-\Delta\Phi &= 0 & \text{in} \quad \Omega, \\
\Phi_{tt} + g\,\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= F_t & \text{on} \quad \Gamma_0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 & \text{on} \quad \Gamma_1, \\
\Phi(0,x,y,z) &= \Phi^1(x,y,z) & \text{in} \quad \Omega, \\
\Phi_t(0,x,y,z) &= \Phi^0(x,y,z) & \text{in} \quad \Omega.
\end{cases}
$$

ここで，Ω は2次元あるいは3次元有界単連結水域，Γ_0 と Γ_1 はそれぞれ静止水面と個体壁である．Φ は水の速度ポテンシャル関数である．$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ は Ω の境界における外向き法線微係数を，g は重力加速度を，F は外力を表す．

水の波線形非定常問題（LWW）は，ヒルベルト空間 X を静止水面 Γ_0 上の2乗可積分関数 $L^2(\Gamma_0)$ とおき，［4］のように自己共役作用素 A を定めると，ϕ に関する二階定作用素係数非定常問題 $(E:\ \phi^1, \phi^0, \psi)$ として表せる．

ここでは，図1に示す底が傾斜した水槽内の水の波を扱う．静止水域 Ω を，フリードリックス・ケラー型分割により一様な三角形に分割し，それに対応する区分一次関数の作る空間で，定数関数を含む有限要素空間を X_h とおく．水平方向の分割数を I，鉛直方向の分割数を $2I$ とする．空間方向を X_h を用いて通常のガレルキン近似により離散化し，さらに時間方向をニューマークの方法により離散化して得られるスキームは，［4］に従って定められる有界自己共役作用素 A_h を用いると，全離散近似問題 $(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau}, \phi^0_{h,\tau}, \psi_{h,\tau,m})$ として表現出来る．この作用素 A_h は，$P_h A$ とは異なるもので，ある種の変分法違反が生じている．

すると［4］により，2節で存在を仮定した関数 $\varepsilon(h)$ を h とおくことが出来，また $s \in [1, 3/2]$ に対して (ε_{s-1}) が成立するので，もし条件 (D_s) が成り立てば定理2を適用出来る．図2に，数値的に得たノルム $\|A_h\|$ と水平方向の分割数 I との関係を示す．水平方向に平行な要素三角形の辺の長さを h とすると，$\|A_h\|$ が h に反比例しており，$\varepsilon(h) = h$ との整合性を観察出来る．

我々は次のテストデータによる誤差の解析を試みた．

$$
\begin{aligned}
(E:\ \phi^1, \phi^0, \psi) &= (0.0,\ \varphi^0,\ 0.0), \\
(E_{h,\tau}:\ \phi^1_{h,\tau}, \phi^0_{h,\tau}, \psi_{h,\tau,m}) &= (0.0,\ P_h\varphi^0,\ 0.0).
\end{aligned}
$$

ここで P_h は空間 X から空間 X_h への正射影作用素である．

ところで，空間 $D(A^s)$ に対する理解が不十分なため，具体的なデータに対して条件

(D_s) の実パラメタ s をどのように定めればよいかはまだ判らない．そこで時間刻み τ を安定条件と $\tau = \tau(h) = \text{const.}\ h^{\sigma/2}$ の両方を満たすように定めて，数値計算を行なった．定理2による事前評価は，$s \in [1/2,\ \infty)$, $\sigma \geq 1$, $(\beta,\ \delta) = (0.0,\ 0.0)$ のとき，次の様になる：

$$\begin{aligned}
&\|\phi(m\tau) - \phi_{h,\tau,m}\| \\
&= O\left(\varepsilon(h)^s\right) \ + \ O\left(\tau(h)^{2\cdot\min(1,\ s)}\right) \\
&= O\left(\varepsilon(h)^s\right) \ + \ O\left(\varepsilon(h)^{\sigma\cdot\min(1,\ s)}\right) \\
&= O\left(\varepsilon(h)^{\min(s,\sigma)}\right), \qquad\qquad m = 2, 3, \cdots.
\end{aligned}$$

一般に連続問題の厳密解は知られていないので，誤差 $\|\phi(m\tau) - \phi_{h,\tau,m}\|$ を求めることができない．そこで代わりに数値計算可能な量 $\hat{e}(h:T)$ を以下の様に定める．まず時間ステップ数 $m(h)$ を求める：

$$m(h) = \left[\frac{T}{\tau(h)}\right].$$

次に次式を満たす $\lambda \in (0, 1]$ を求め：

$$T = \lambda\ m(h)\ \tau(h) \ + \ (1-\lambda)\ \{m(h)+1\}\ \tau(h),$$

数値解 $\phi_{h,\tau,m}$ と $\phi_{h,\tau,m+1}$ を線形的に補間して，$\phi_{h,\tau(h)}(T)$ を定める：

$$\phi_{h,\tau(h)}(T) = \lambda\phi_{h,\tau,m} + (1-\lambda)\phi_{h,\tau,m+1}.$$

そして $\phi_{h,\tau(h)}(T)$ と $\phi_{h/2,\tau(h/2)}(T)$ の差のノルムを $\hat{e}(h:T)$ と定める：

$$\hat{e}(h:T) = \left\|\phi_{h,\tau(h)}(T) - \phi_{h/2,\tau(h/2)}(T)\right\|.$$

時刻 T を固定し，いろいろな h_i について $\hat{e}(h_i:T)$ を数値的に求め，h に関する収束オーダーを観測することにより，

$$\left\|\phi_{h,\tau(h)}(T) - \phi(T)\right\|$$

の h に関する収束オーダーを推測するものである．

図3に，$\sigma = 1.5$ とおき，φ^0 として解析的なデータを与えたときの，$T = T_1, T_5, T_{10}$，$1/h = 6, 12, 24, 48, 8, 16, 32$ の計算値 $\hat{e}(h:T)$ をプロットした．ただし $T_i = i/4$ である．そのグラフの傾きを，最小二乗法により求め，小数点以下4桁を四捨五入したものを表1に示す．

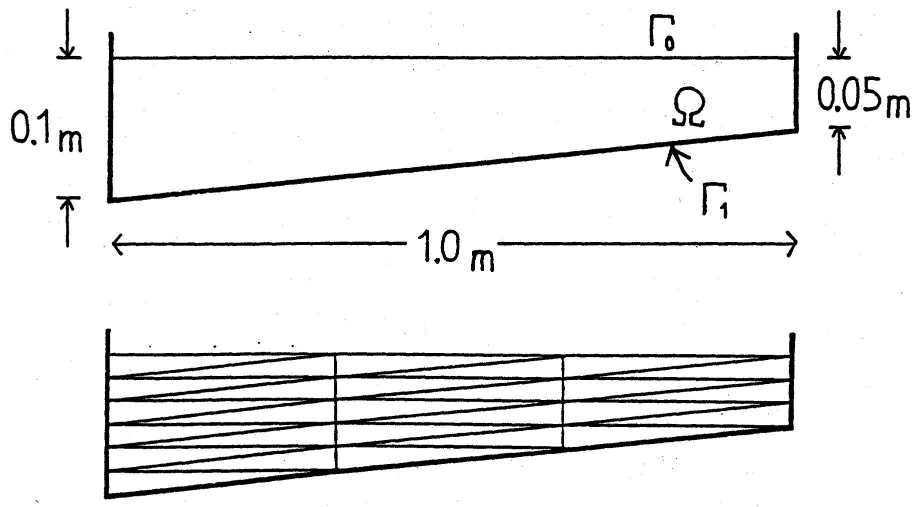

図1　静止水域 Ω とそのフリードリックス・ケラー型三角形分割（I = 3 の場合）

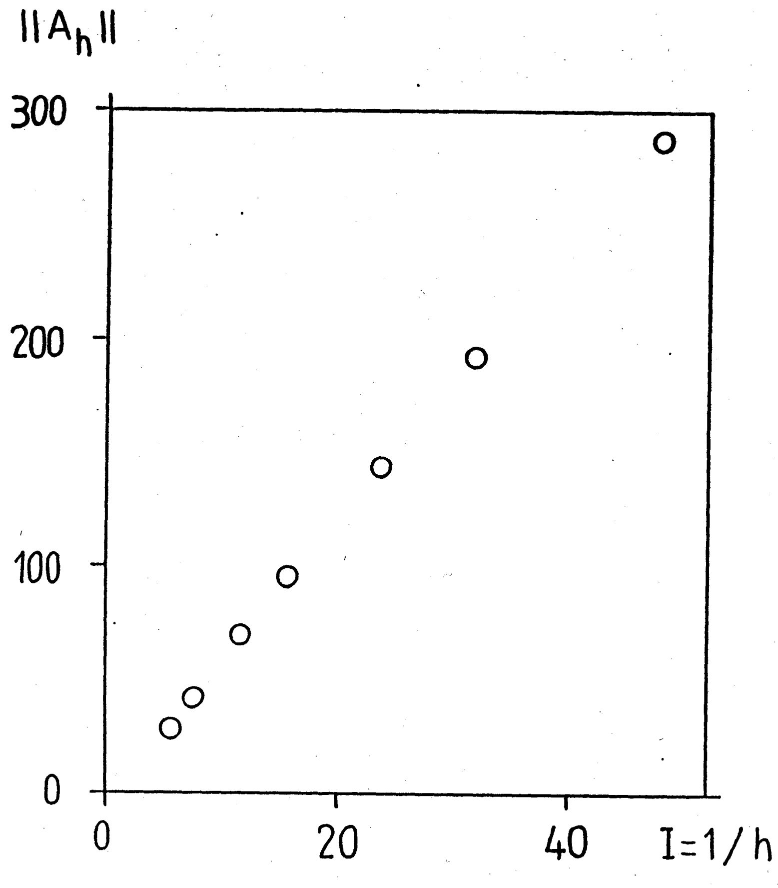

図2　ノルム $\|A_h\|$ と水平方向の分割数 $I = 1/h$ の関係

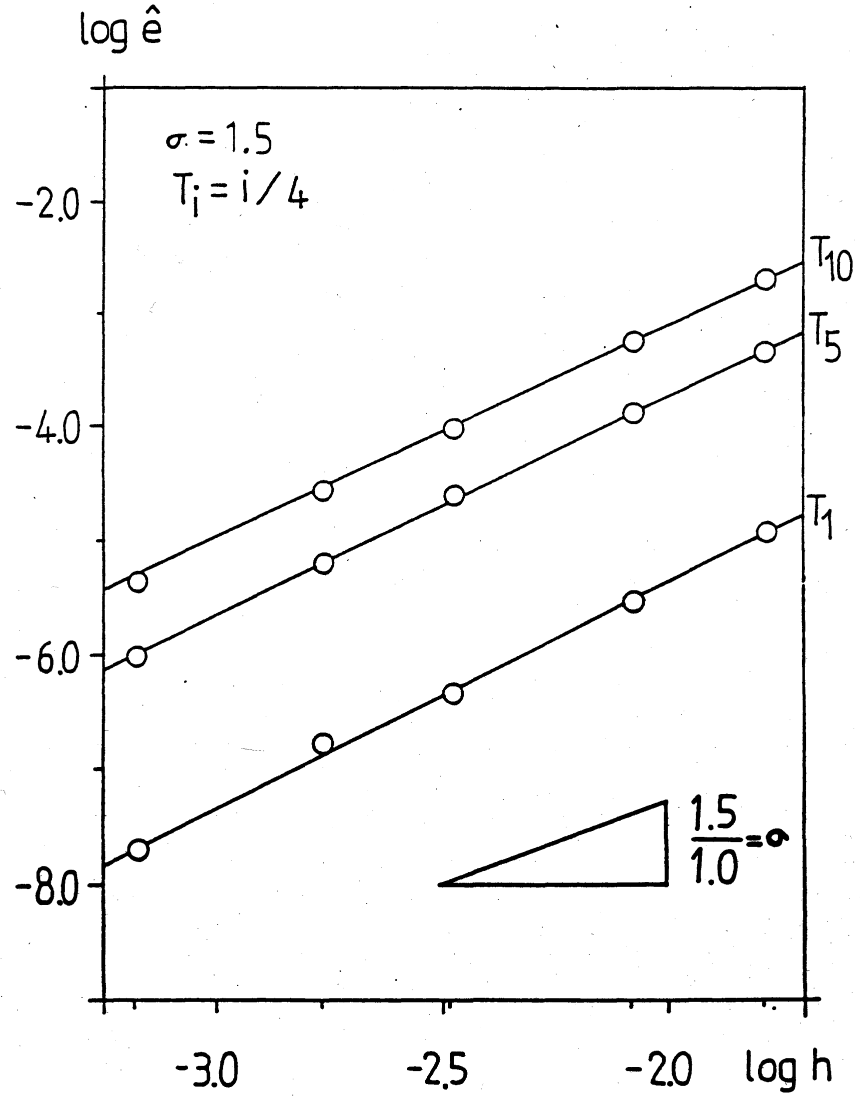

図3　データ $\varphi^0 \in C^\omega$ に対する時刻 T_1, T_5, T_{10} の $\hat{e}$ と h の関係

T	傾き
T_1	1.963
T_5	1.914
T_{10}	1.890

表1　図3のグラフの傾き

Case	φ^0
▽ Case1	$\notin C^0$
△ Case2	$\in C^0,\ \notin C^1$
◇ Case3	$\in C^1,\ \notin C^2$
□ Case4	$\in C^2,\ \notin C^3$
○ Case5	$\in C^\omega$

表2　図4の記号とデータ ϕ^0 の滑らかさ

Case	傾き
▽ Case1	1.205
△ Case2	1.441
◇ Case3	1.656
□ Case4	1.702
○ Case5	1.890

表3　図4のグラフの傾き

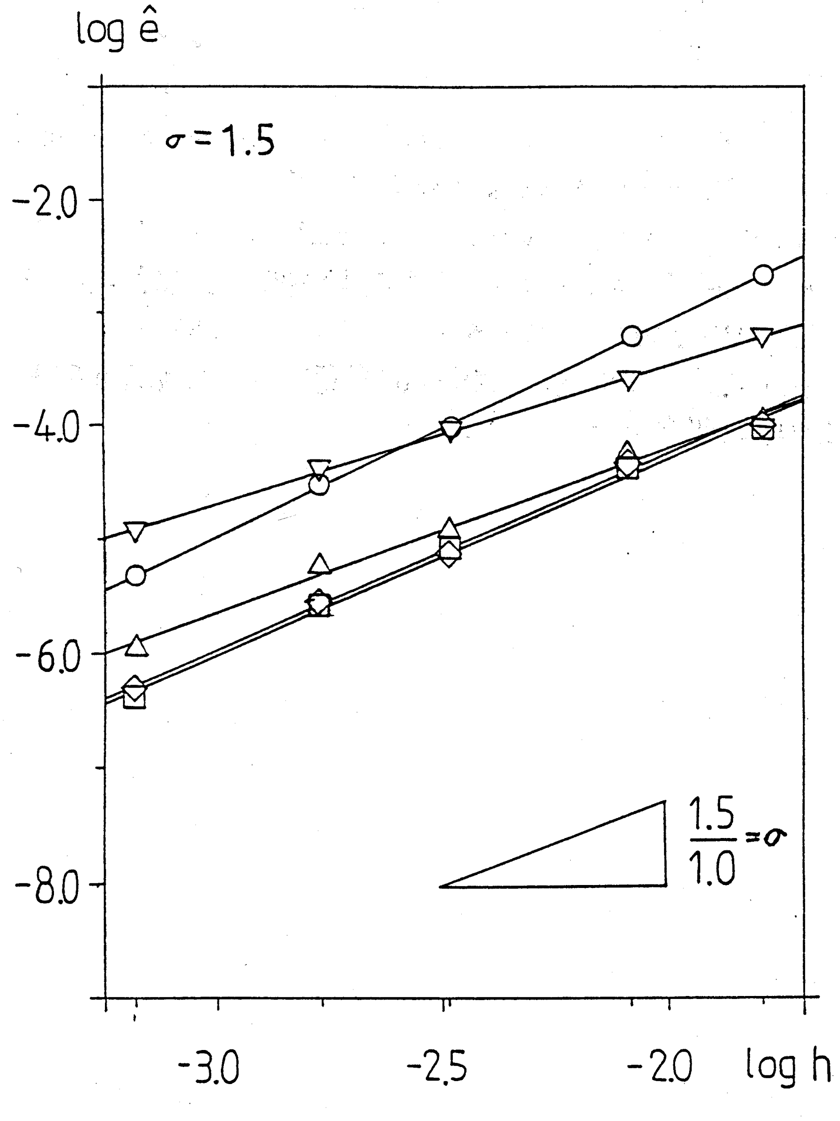

図4　表2に示すデータ φ^0 に対する時刻 T_{10} の $\hat{e}$ と h の関係

図4には，表2に示す5種類の人工的に作った滑らかさの異なるデータ φ^0 を与えたときの，$\sigma = 1.5$, $T = T_{10}$, $1/h = 6, 12, 24, 48, 8, 16, 32$ に対する計算値 $\hat{e}(h : T)$ をプロットした．そのグラフの傾きを表3に示す．

参考文献

[1] Raviart, P. A., Thomas, J. M., Introduction a l'Analysee Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris, 1983.

[2] Stoker, J. J., Water Waves, Interscience Publishers, New York, 1957.

[3] 牛島照夫, 松木美保子，ニューマークβ法の誤差評価，日本数学会 1988 年度秋季総合分科会応用数学分科会講演アブストラクト，PP.8-11，1988.

[4] 牛島照夫, 松木美保子, 青木篤，水の波線形問題について, 数理解析研究所講究録 691, 京都大学数理解析研究所, pp.97-125，1988.